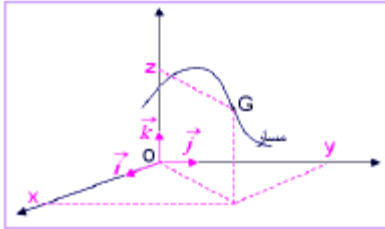


Mécanique : Lois de Newton

1) Mouvement du centre de gravité d'un solide

Repère de Dicarte



Le centre de gravité G est repéré par :

$$\overrightarrow{OG} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Repère de Fresnel



$$s = \widehat{\Omega G}$$

Equations Horaires ou équations paramétriques du mouvement

$$X = f(t), \quad y = f(t), \quad z = f(t)$$

$$s = f(t)$$

Equation de la trajectoire : on élimine le temps

➤ Vecteur vitesse

La vitesse instantanée du centre de gravité est définie par :

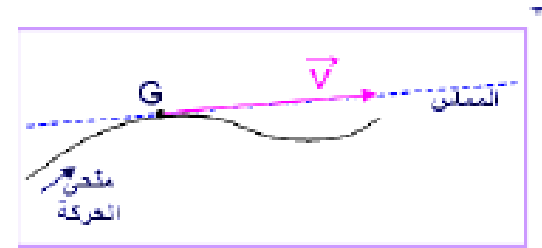
$$\vec{V}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

Propriétés d $\vec{V}$

Origine : centre de gravité G

Direction : tangente à la trajectoire

Sens : sens du mouvement



Expression de V

Repère de Dicarte

$$\vec{V}_G = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{V}_G \begin{cases} v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad (m.s^{-1})$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (m.s^{-1})$$

Repère de Fresnel

$$\vec{V}_G = v \vec{u}$$

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

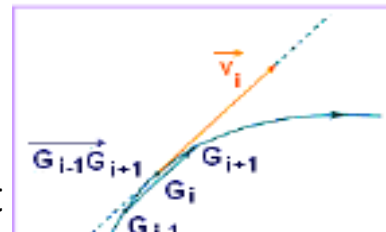
$$v = \pm |\vec{V}|$$

$V > 0$ G se déplace dans le sens du mouvement

$V < 0$ G se déplace dans le sens contraire du mouvement

Construction de V

A partir de l'enregistrement du mouvement



$$v_i \approx \frac{G_{i-1}G_{i+1}}{2\tau}$$

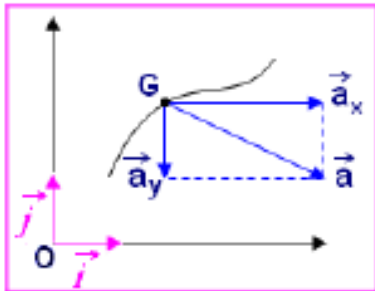
➤ Vecteur accélération

Repère de Dicarte

$$\vec{a}_G = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases} \quad (m.s^{-2})$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (m.s^{-2})$$



$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2}$$

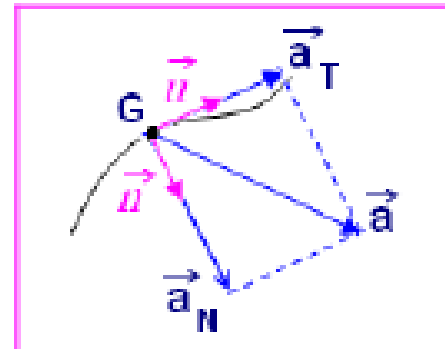
Repère de Fresnel

$$\vec{a}_G = a_T \vec{u} + a_N \vec{n}$$

$$\mathbf{a}_T = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_N = \frac{v^2}{R}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \quad (m.s^{-2})$$



$$\vec{a} \cdot \vec{v} \begin{cases} > 0 & \text{mouvement accéléré} \\ < 0 & \text{mouvement retardé} \\ 0 & \text{mouvement uniforme} \end{cases}$$

Lois de Newton

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel les lois de Newton sont vérifiées.

- Pour simplifier l'étude du système, on choisit toujours un référentiel adapté.

Première loi de Newton : le principe de l'Inertie

Dans un référentiel galiléen, si un système assimilé à un point matériel n'est soumis à aucune force (système isolé) ou s'il est soumis à un ensemble de forces dont les effets se compensent (système pseudo-isolé), alors il est immobile ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_G = \vec{Cte}$$

Deuxième loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique.

Dans un référentiel galiléen, si un système assimilé à un point matériel est soumis à une ou plusieurs forces extérieures, alors la somme vectorielle de ces forces est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

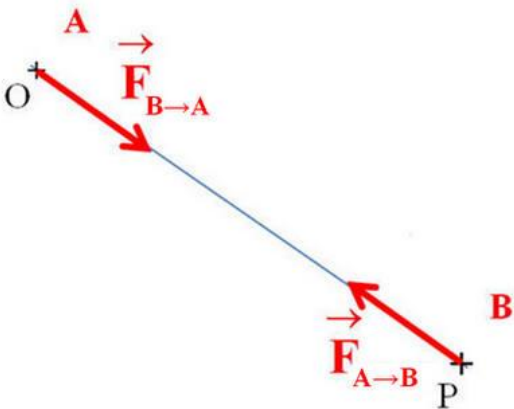
Ou

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G$$

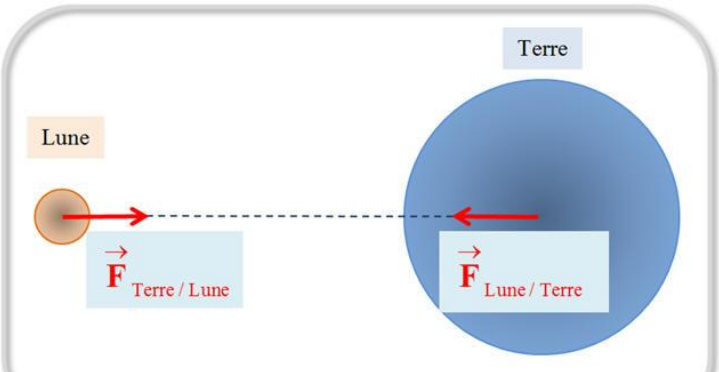
Troisième loi de Newton : Principe des actions réciproques.

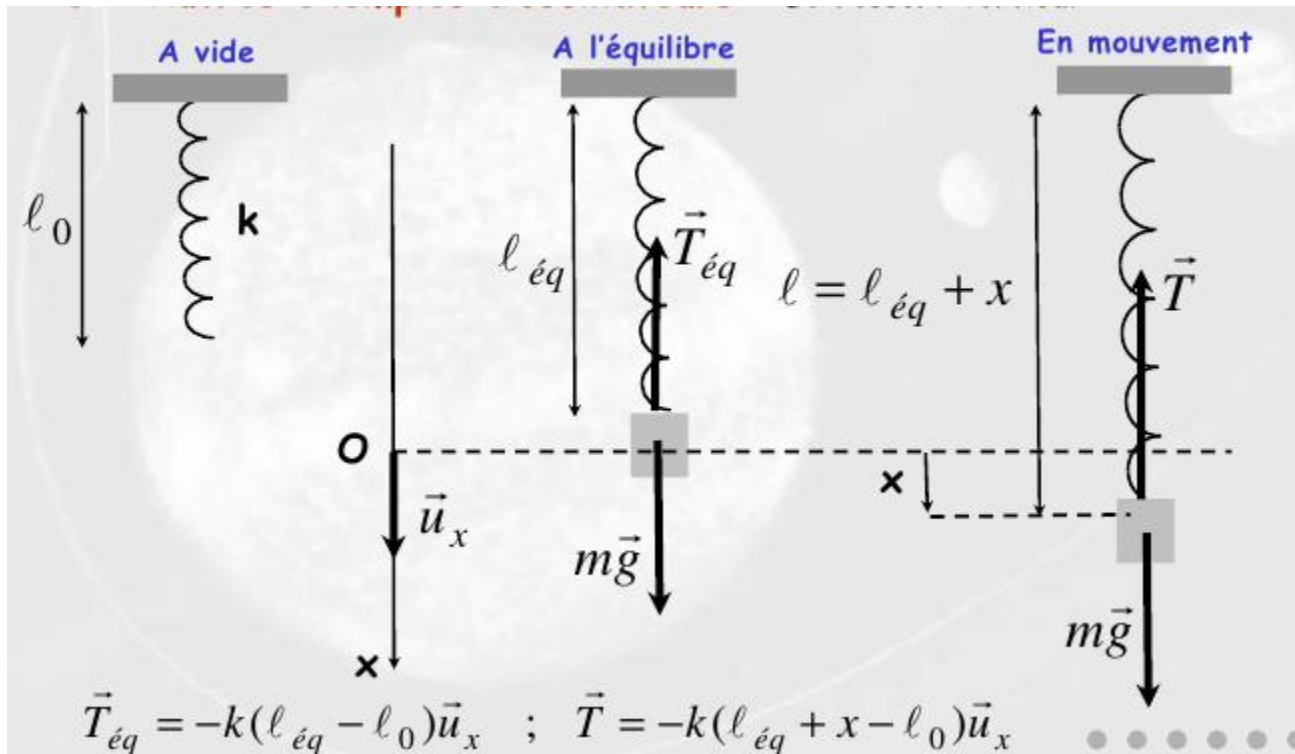
Soit deux corps A et B qui exercent mutuellement une force sur l'autre corps. Alors on a :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$



Exemple





En l'absence de frottements :

A l'équilibre : $m\vec{g} + \vec{T}_{eq} = \vec{0} \quad ; \quad -k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x = \vec{0} \quad ; \quad \ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

En mouvement : $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \quad ; \quad -k(\ell_{eq} + x - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$

En tenant compte de la relation obtenue à l'équilibre :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{Avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

Exercice d'application 2

Un mobile se déplace dans le plan muni du repère $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec un vecteur accélération $\vec{a} = -8\vec{j}$.
 A l'instant initial $t=0$, le vecteur position du mobile ainsi que son vecteur vitesse sont donnés

respectivement par : $\vec{OM}_0 = -3\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{V}_0 = 2\vec{i} + 4\vec{j}$

2.1. Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile est de la forme $y = A.x^2 + B.x + C$ où A , B et C sont des constantes à déterminer.

2.2. A quelle date le mobile atteint-il le sommet de sa trajectoire?

2.3. Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t_0=0$ et $t_1=1s$.

2.4. Calculer l'accélération moyenne entre ces mêmes instants.

2.5. Sur quel intervalle de temps le mouvement est-il décéléré?

1) TCI $\Rightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$

on $\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + h \end{cases} \quad \text{--- (1)}$

2) $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha + h \quad \text{--- (01)}$

4) la balle touche le sol pour $y=0$

$y = -\frac{x^2}{10} + x + 2,7 = 0$

$x = 12,21 \text{ m}$ ou $x = -2,21$ (impossible)

$x = v_0 \cos \alpha t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$

$t = \frac{12,21}{10 \times \cos 45} = 1,73 \text{ s}$

$\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = 10 \times \cos 45 = 7,07 \end{cases}$

$\dot{y} = -10 \times (1,73) + 10 \times \sin 45 = -10,13$

$v = \sqrt{7,07^2 + 10,13^2} = 12,35 \text{ m/s} \quad \text{--- (1)}$

$\tan \beta = \frac{-10,13}{7,07} \Rightarrow \beta = -55,1^\circ \quad \text{--- (01)}$

3) Coordonnée de S

$y' = -\frac{x}{5} + 1 = 0 \Rightarrow x_s = 5 \text{ m}$
 $y_s = -\frac{25}{10} + 5 + 2,7 = 5,2 \text{ m} \quad \text{--- (1)}$

5) On pose $\alpha = 0$

$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha + h$

$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + h \quad \text{--- (01)}$

6) $y(x=12) = -\frac{10}{2 \times 25^2} \times 12^2 + 2,7 = 1,55 \text{ m}$

$y(x=L) = 1,55 \text{ m} > 1 \text{ m}$ donc la balle franchira le filet. (1)

$y=0 \Rightarrow x_{\text{st}} = \sqrt{\frac{2v_0^2 h}{g}} = 18,4 \text{ m}$

$d = 18,4 \text{ m} - 12 \text{ m} = 6,4 \text{ m} \quad \text{--- (01)}$